

§5. Lineární lomená funkce

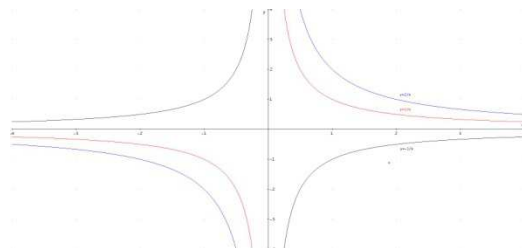
Def.: Necht' $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$. Pak funkci $f: y = \frac{k}{x}$ nazýváme nepřímou úměrností s koeficientem k .

Pozn.: a) $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
 $H(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

b) Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola s asymptotami na svých osách.

V.5.1.: Necht' $f: y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ je nepřímá úměrnost. Pak platí:

- 1) f je lichá
- 2) $k > 0$ f je klesající v každém intervalu $(-\infty; 0), (0; \infty)$
 $k < 0$ f je rostoucí v každém intervalu $(-\infty; 0), (0; \infty)$
- 3) f není omezená ani shora ani zdola
- 4) f nemá extrémy
- 5) f není periodická
- 6) f je prostá



Def.: Necht' $a, b, c, d \in \mathbf{R}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$. Pak funkci $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nazýváme lineární lomenou funkcí.

Pozn.: Nepřímá úměrnost je speciálním případem lineární lomené funkce pro $a = d = 0 \Rightarrow k = \frac{b}{c}$.

Pozn.: Vlastnosti lineární lomené funkce vyšetříme dělením $(ax + b)$ a $(cx + d)$ a úpravou:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}; \text{ úpravou potřebujeme získat tvar } A + \frac{K}{x-B}$$

K – koeficient nepřímé úměrnosti, kterou budu posouvat

B – posun grafu nepřímé úměrnosti po ose x o $-\frac{d}{c}$

A – posun grafu nepřímé úměrnosti po ose y o $\frac{a}{c}$

Pozn.: Úpravu lineární lomené funkce můžeme provést následovně:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{k}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

Pozn.: a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

$$H(f) = \mathbf{R} - \{\frac{a}{c}\}$$

b) Grafem lineární lomené funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami: $x = -\frac{d}{c}$
 $y = \frac{a}{c}$

V.5.2.: Necht' $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ je lineární lomená funkce. Pak platí:

1) parita – obecně není ani sudá ani lichá

2) $bc > ad$, pak f je klesající v intervalu

$$(-\infty; -\frac{d}{c}) \text{ a } (-\frac{d}{c}; \infty)$$

$bc < ad$, pak f je rostoucí v intervalu

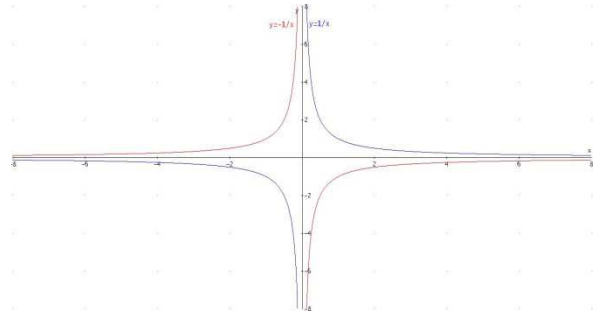
$$(-\infty; -\frac{d}{c}) \text{ a } (-\frac{d}{c}; \infty)$$

3) f není ani shora ani zdola omezená

4) f nemá extrém

5) f není periodická

6) f je prostá



§6. Racionální lomená funkce

Def.: Necht' $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ jsou polynomy, $Q(x) \neq 0(x)$, pak funkci $f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nazýváme racionální lomenou funkcí.

Pozn.: a) Polymická funkce je speciálním případem racionální lomené funkce pro konstantní polynom $Q(x)$.
b) Lineární lomená funkce je speciálním případem racionální lomené funkce pro lineární polynom $Q(x)$ a konstantní nebo lineární $P(x)$.

Pozn.: $D(f) = \mathbf{R} - \{c_1; c_2; \dots; c_n\}$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou reálné kořeny polynomu $Q(x)$.

V.6.1.: Necht' $f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0(x)$ je racionální lomená funkce, kde $P(x)$ a $Q(x)$ nemají společné kořeny. Necht' $c_1, c_2, \dots, c_k$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomů $P(x)$ a $Q(x)$ s lichou násobností. Necht' $c_1 < c_2 < \dots < c_k$. Pak v každém z intervalů $(-\infty, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{k-1}, c_k), (c_k, \infty)$ je racionální lomená funkce

$f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ stále nekladná nebo nezáporná (v těch bodech, v nichž je definována).

V sousedních intervalech se znaménka střídají.

Def.: Racionální lomená funkce $f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $Q(x) \neq 0(x)$ se nazývá:

- a) ryze lomená racionální funkce, právě když $\text{st}(P(x)) < \text{st}(Q(x))$,
- b) neryze lomená racionální funkce, právě když $\text{st}(P(x)) \geq \text{st}(Q(x))$.

V.6.2.: Neryze lomená racionální funkce je buď polynom, nebo se dá vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

V.6.3.: Věta o rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky:

Necht' $f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $Q(x) \neq 0(x)$ je ryze lomená racionální funkce, kde polynomy

$P(x)$ a $Q(x)$ nemají společné kořeny. Necht'

$Q(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_l)^{k_l} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{r_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{r_s}$ je rozklad polynomu $Q(x)$ v reálném oboru. Pak existují čísla $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1k_1}; C_{21},$

$C_{22}, \dots, C_{2k_2}; \dots; C_{l1}, C_{l2}, \dots, C_{lk_l}; P_{11}, Q_{11}, P_{12}, Q_{12}, \dots, P_{1r_1}, Q_{1r_1}; P_{21}, Q_{21}, P_{22}, Q_{22},$

$\dots, P_{2r_2}, Q_{2r_2}; \dots; P_{s1}, Q_{s1}, P_{s2}, Q_{s2}, \dots, P_{sr_s}, Q_{sr_s}$ tak, že pro $\forall x \in \mathbf{R}$ platí: $y =$

$$= \left[\frac{C_{11}}{x - c_1} + \frac{C_{12}}{(x - c_1)^2} + \dots + \frac{C_{1k_1}}{(x - c_1)^{k_1}} + \frac{C_{21}}{x - c_2} + \frac{C_{22}}{(x - c_2)^2} + \dots + \frac{C_{2k_2}}{(x - c_2)^{k_2}} + \dots \right. \\ \dots + \frac{C_{l1}}{x - c_l} + \frac{C_{l2}}{(x - c_l)^2} + \dots + \frac{C_{lk_l}}{(x - c_l)^{k_l}} + \frac{P_{11}x + Q_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{P_{12}x + Q_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots \\ \dots + \frac{P_{1r_1}x + Q_{1r_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} + \frac{P_{21}x + Q_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{P_{22}x + Q_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{P_{2r_2}x + Q_{2r_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{r_2}} + \dots \\ \left. \dots + \frac{P_{s1}x + Q_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{P_{s2}x + Q_{s2}}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{P_{sr_s}x + Q_{sr_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{r_s}} \right] \frac{1}{a_n}$$

§7. Mocninná a inverzní funkce

Mocninná funkce s celým exponentem

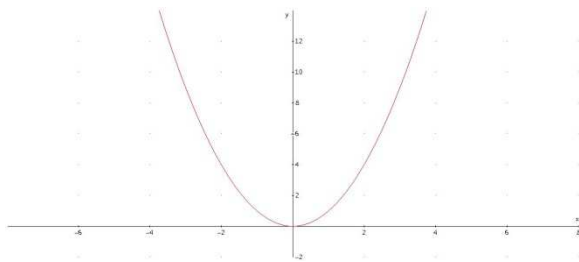
Def.: Necht' $n \in \mathbf{N}$. Pak $f: y = x^n$ nazýváme mocninnou funkcí s přirozeným exponentem.

Pozn.: Jde o speciální případ polynomické funkce pro $a_n = 1; a_i = 0; \forall i \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Pozn.: a) $f: y = x^n, n = 2k, k \in \mathbf{N}$

$$D(f) = \mathbf{R}$$

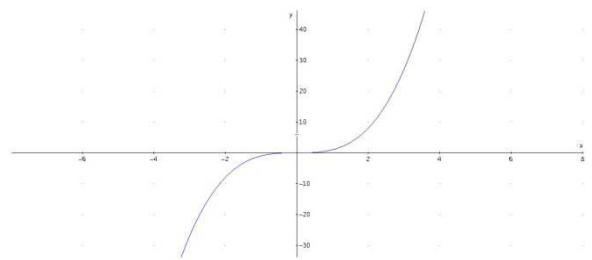
$$H(f) = \langle 0; \infty \rangle$$



b) $f: y = x^n, n = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$

$$D(f) = \mathbf{R}$$

$$H(f) = \mathbf{R}$$



V.7.1.: Necht' $f: y = x^n; n \in \mathbf{N}$ je mocninná funkce s přirozeným exponentem. Pak platí:

$$n = 2k, k \in \mathbf{N}$$

$$n = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$$

1) parita

sudá

lichá

2) monotónnost

$x \in (-\infty; 0) \dots$ klesající

rostoucí

$x \in \langle 0; \infty \rangle \dots$ rostoucí

3) omezenost

zdola omezená

není zdola omezená

není shora omezená

4) extrém

minimum v bodě $[0; 0]$

nemá extrém

5) periodicit

neperiodická

neperiodická

Def.: Necht' $n \in \mathbf{N}, x \neq 0$. Pak funkci $f: y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ nazýváme mocninnou funkcí s celým záporným exponentem.

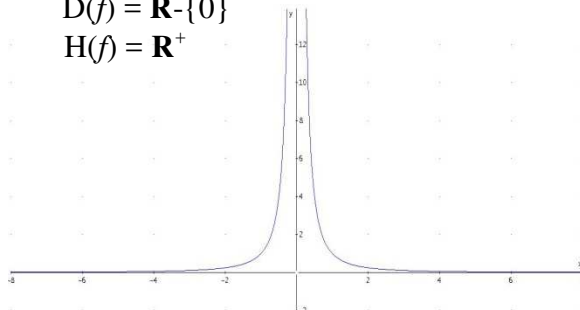
Pozn.: a) Jde o speciální případ racionální lomené funkce.

b) Připomeňme, že $x^0 = 1; \forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Pozn.: a) $y = x^{-n}; n = 2k; k \in \mathbf{N}$

$$D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$$

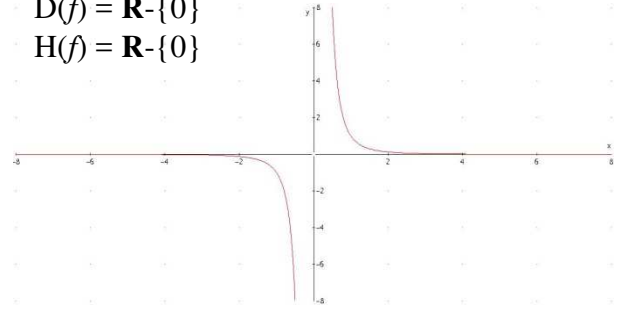
$$H(f) = \mathbf{R}^+$$



b) $y = x^{-n}; n = 2k + 1; k \in \mathbf{N}_0$

$$D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$$

$$H(f) = \mathbf{R} - \{0\}$$



V.7.2.: Necht' $f: y = x^{-n}; x \in \mathbf{R} - \{0\}, n \in \mathbf{N}$ je mocninná funkce s celým záporným exponentem. Pak platí:

	$n = 2k; k \in \mathbf{N}$	$n = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$
1) parita	sudá	lichá
2) monotónnost	$x \in (-\infty; 0) \dots$ rostoucí $x \in (0; \infty) \dots$ klesající	$x \in (-\infty; 0) \dots$ klesající $x \in (0; \infty) \dots$ klesající
3) omezenost	zdola omezená	není zdola omezená není shora omezená
4) extrém	nemá extrém	nemá extrém
5) periodita	neperiodická	neperiodická prostá

Pozn.: Necht' $\alpha \subseteq A \times B$ je binární relace. Inverzní relací k α , nazýváme relaci $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$:
 $\alpha^{-1} = \{[y, x] \in B \times A, [x, y] \in \alpha\}$.

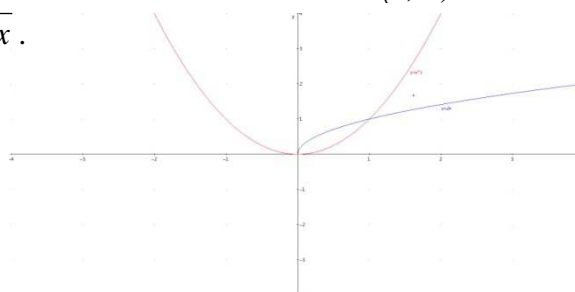
Inverzní relace funkce nemusí být vždy funkcí, ale platí: Necht' f je funkce. Inverzní relace f^{-1} je funkcí $\Leftrightarrow f$ je prostá.

Def.: Necht' f je prostá funkce. Pak inverzní relace f^{-1} k prosté funkci f se nazývá inverzní funkce k funkci f .

Pozn.: a) Má-li funkce f definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$, pak inverzní funkce f^{-1} má definiční obor $D(f^{-1}) = H(f)$ a obor hodnot $H(f^{-1}) = D(f)$.
b) Grafy funkce f a funkce k ní inverzní f^{-1} (u nichž jsou zaměněné proměnné) jsou souměrně sdružené podle přímky o rovnici $y = x$.
c) Je-li funkce f rostoucí (klesající), je také f^{-1} rostoucí (klesající).

Mocninná funkce s racionálním exponentem

Př.: Nalezněte inverzní funkci k funkci $f: y = x^2$.
Taková funkce neexistuje, neboť f není prostá. Proto zúžíme $D(f) = \langle 0; \infty \rangle \Rightarrow$ zde je f rostoucí (tedy prostá) $\Rightarrow \exists f^{-1}: y = \sqrt{x}$.



Def.: Necht' $n \in \mathbf{N}, n \geq 2, x \geq 0$. Pak inverzní funkci k funkci $f: y = x^n$ nazýváme n -tou odmocninou a značíme $f^{-1}: y = \sqrt[n]{x}$.

Pozn.: $D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = \langle 0; \infty \rangle$

V.7.3.: Necht' $f^{-1}: y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ je n -tá odmocnina. Pak platí:

- 1) f^{-1} není ani lichá ani sudá
- 2) f^{-1} je rostoucí (tedy prostá)
- 3) zdola omezená
- 4) ostré minimum v bodě $[0; 0]$
- 5) není periodická

Pozn.: $\forall x, y \in \langle 0; \infty \rangle, \forall n \in \mathbf{N}: y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$

Pozn.: Pravidla pro počítání s odmocninami:

$\forall a, b \in \mathbf{R}^+_0, \forall m, n, p \in \mathbf{N}$, platí:

$$1) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$5) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

Pozn.: Zvláštním případem je $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).

Def.: Necht' $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{R}^+$. Pak funkci $f: y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ nazýváme mocninnou funkcí s racionálním exponentem.

Pozn.: Definiční obor mocninné funkce s racionálním exponentem (tj. pro která a je

definovaná mocnina s racionálním exponentem $a^{\frac{p}{q}}$) závisí na exponentu $\frac{p}{q} = r$:

$$r \in \mathbf{N} \Rightarrow a \in \mathbf{R} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}$$

$$r \in \mathbf{Z} - \mathbf{N} \Rightarrow a \in \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$$

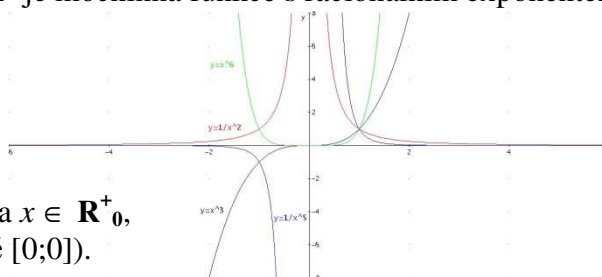
$$r \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z} \Rightarrow a \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}^+ \text{ (pro } r > 0 \Rightarrow a \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}^+)$$

Pozn.: Grafy mocninné funkce s racionálním exponentem také samozřejmě závisí na exp. r .

$$r \in \mathbf{Q}^+ - \mathbf{Z} \Rightarrow D(f) = H(f) = \mathbf{R}^+_0 \wedge \quad r \in \mathbf{Q}^- - \mathbf{Z} \Rightarrow D(f) = H(f) = \mathbf{R}^+$$

V.7.4.: Necht' $f: y = x^r, r \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R}^+$ je mocninná funkce s racionálním exponentem. Pak platí:

- 1) funkce f není sudá ani lichá
- 2) $r > 0 \dots f$ je rostoucí
 $r < 0 \dots f$ je klesající
- 3) funkce f je zdola omezená
- 4) funkce nemá extrém (když $r > 0$ a $x \in \mathbf{R}^+_0$, potom f má ostré minimum v bodě $[0;0]$).



Pozn.: Pravidla pro počítání s mocninami:

$\forall a, b \in \mathbf{R}^+, \forall r, s \in \mathbf{Q}, (r > s, b \neq 0)$, platí:

$$1) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$2) a^r : a^s = a^{r-s}$$

$$3) \left((a^r)^s \right) = a^{rs}$$

$$4) (ab)^r = a^r b^r$$

$$5) \left(\frac{a}{b} \right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Pozn.: Analogicky jako mocninnou funkci s racionálním exponentem bychom mohli zavést mocninnou funkci s reálným exponentem (případně mocninu s reálným exponentem). Definiční obor (základ) by byl také z $\mathbf{R}^+$ a platily by stejné vztahy jako pro racionální exponenty.